Sur le Papyrus graecus genevensis 259

Par Jacques Sesiano, Lausanne

Ariadnae

1. Introduction

En 1978, M. J. Rudhardt a édité le texte du verso du Papyrus graecus 259 de la Bibliothèque de Genève, du deuxième siècle après J.-C., contenant trois problèmes de géométrie, dont les deux premiers sont conservés presque intégralement alors que le dernier est sévèrement mutilé[1]. En 1986, nous avons fait paraître une analyse mathématique de ces problèmes en nous appuyant sur le texte qu'avait publié J. Rudhardt[2]. Revenant sur ce groupe de problèmes en préparant une étude concernant un aspect de l'algèbre grecque[3], nous avons désiré examiner plus attentivement le papyrus lui-même, et il nous est alors apparu que son édition était entachée de quelques erreurs de lecture et que la compréhension de la résolution du dernier problème permettait d'en rétablir le texte avec une grande vraisemblance.

L'importance du Papyrus 259 est, pour l'histoire des mathématiques du moins, considérable, car il est l'un des rares documents rapportant une forme rudimentaire de l'algèbre antique, plus guère connue aujourd'hui. En effet, l'algèbre grecque est resté liée au nom de Diophante d'Alexandrie (vers 250), auteur d'une *Arithmetica* en treize livres (βιβλία), dont six sont conservés en grec et quatre autres dans une traduction arabe du X^{e} siècle[4]. Cette dernière forme d'algèbre est, mutatis mutandis, assez proche de la nôtre: Diophante y utilise des symboles pour l'inconnue et ses diverses puissances ainsi que pour quelques opérations; plus encore, le raisonnement algébrique rigoureux en rend la lecture aisée au lecteur moderne, pour autant qu'il possède quelque teinture des mathématiques.

Ce même lecteur restera en revanche interdit devant la première forme d'algèbre, celle qui est primitive et que l'on pourrait qualifier d'archaïque puisqu'elle apparaît aussi dans des textes cunéiformes remontant aux années –1800 écrits en accadien, mais que l'on croit adaptés de textes antérieurs sumériens. Les problèmes y sont traités d'une façon fort singulière: on parvient à la

1 «Trois problèmes de géométrie, conservés par un papyrus genevois», *MusHelv* 35 (1978) 233–240. Reproduit dans P. Schubert, *Les papyrus de Genève*, vol. III (Genève 1996) 49–53 (n° 124).

2 «Sur un papyrus mathématique grec conservé à la Bibliothèque de Genève», *MusHelv* 43 (1986) 74–79.

3 «An early form of Greek algebra», *Centaurus* 40 (1998) 276–302.

4 P. Tannery, *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis commentariis* (Leipzig 1893–1895, 2 vol.); J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus'* Arithmetica *in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā* (New York 1982).

solution au travers d'une suite de calculs apparemment décousus, menés sans que l'on sache ni quelle est l'équation à résoudre ni pourquoi on procède ainsi, en telle sorte que seule l'exactitude des résultats conduit à soupçonner l'existence d'une méthode. La clef de l'interprétation s'obtient en supposant la connaissance par le lecteur d'un petit nombre d'identités remarquables qui sont utilisées pour déterminer les valeurs des grandeurs cherchées. Ainsi s'explique le cheminement des calculs dans les deux derniers problèmes de notre papyrus (le premier n'est qu'une banale application du théorème de Pythagore). Ainsi s'explique aussi la résolution de quelques autres problèmes du second degré d'origine grecque conservés les uns dans des écrits d'agrimenseurs romains et les autres dans un ensemble mathématique disparate réuni sous le nom de Héron d'Alexandrie[5].

2. Lecture et restauration du texte

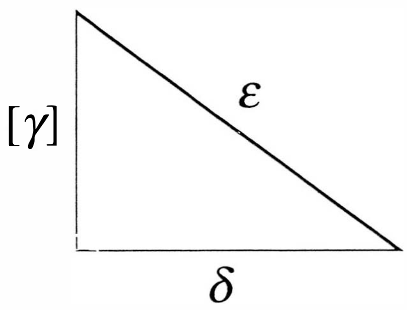
La transcription qui suit reprend les notations d'usage, à savoir des crochets pour enfermer des parties illisibles et un point placé sous une lettre pour indiquer qu'elle est endommagée, mais néanmoins reconnaissable – au moins a posteriori.

Première colonne:

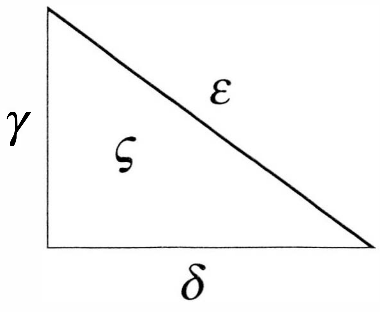
Εστω δε̣ π[...]ν τ̣ρ̣ι[.]ω̣[..]ν εχο̣ν
την μεν κα̣[..]το̣[.] πo^{δ} γ̅ τη̣ν
δε υπο̣τειν̣[..]σ̣αν̣ ε̅ ευρειν
την βασιν ευρησομεν δε
ουτω[.] τα ε εφ̣ α[.]τα γι κε
και τα γ̅ εφ αυτα γι ϑ̅ και α
πο των κ̅ε̅ αρον τα ϑ̅ [.]ο̣ιπα ι̅ς̅
ων πλευρα δ̣̅ εστα[.] η βα
σις δ̅ ομοιω[.] δ̣ε και επ αλ
λων αριθμων ευρη̣σομεν.

Deuxième colonne:

γι β̅ τα β̅ αφελε α̣π̣ο των η̅
λοιπ̣α̣ ς̣̅ ων ημισου γ̅ εσται
η κα[..]τος γ̅ επειτα τα γ̅
αφελ̣[. .]πο των η̅ λ̣οιπα ε̅
εσ[...] α̣ρα η υποτεινουσα
π[..] ε̣̅.



5 Voir F. Blume/K. Lachmann/A. Rudorff, *Die Schriften der römischen Feldmesser* (Berlin 1848–1852, 2 vol.) I 297–299 ou N. Bubnov, *Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica* (Berlin 1899) 511–513, respectivement le vol. IV (edd. G. Schmidt/J. Heiberg) des *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia* (Leipzig 1912) 415–419 et 422–427. Le texte de ces problèmes est reproduit, avec parfois quelques remaniements mineurs, en annexe de l'étude mentionnée dans la note 3.



Εαν η τριγωνον ορθογων[.]ο̣ν
ου η μεν καθετος [.]αι η̣ υπ̣ο
τεινουσα ις το αυτ̣ο π$^{\delta}$ η
η δε βασις πο$^{\delta}$ δ̅ τ̣ουτου
καθ ιδιαν̣ ζητησ[.]μ̣ε[.]
την τε καθετον και την
υποτεινουσαν ευρησο
μεν δε ουτως τα δ̅ εφ α[.]
τ̣α γι ι̅ς̅ μερισον ις τον η̣̅

[... . .]ρ̣ιγων[.]ν ορθογων̣[...]
[.. . ..]ν καθ[.]τος και η β[....]
[.. .. ...]ο πο$^{\delta}$ ι̅ζ̣̅ η̣ δε υπο[...]
[..... ..]$^{\delta}$ [..̅] ευρειν τ[.. ..]
[....... ... ...]αν και τ[..]
[..... ......]μεν δε [..]
[... .. ..]τα ρ̣[.. ...]
[.. .. .. ..
[... ....]
[.]αι [.. ... .]
τλη λ[.... .. ..]
ταυτα̣ [..... ... .]
λοιπα̣ [. ....]
εσται [. ....]
αφε[.. ... ...]

(ici s'arrête la deuxième colonne)
[..... ... .].

S'il est aisé de compléter le texte des deux premiers problèmes, on ne saurait combler les lacunes du troisième sans comprendre pleinement sa signification mathématique, théorique et numérique. Or, le cheminement de sa résolution ne laisse place à aucun doute dès lors que l'on a compris sa nature algébrique particulière et que l'on connaît ses données numériques; il ne reste alors plus qu'à restituer le texte manquant en tenant compte du nombre des caractères que contient approximativement une ligne du papyrus[6].

Ἔστω δὲ πάλιν τρίγωνον ἔχον / τὴν μὲν κάθετον ποδῶν γ̅, τὴν / δὲ ὑποτείνουσαν ε̅, εὑρεῖν / τὴν βάσιν. Εὑρήσομεν δὲ / οὕτως. Τὰ ε̅ ἐφ' ἑαυτά· γίνονται κ̅ε̅· / καὶ τὰ γ̅ ἐφ' ἑαυτά· γίνονται θ̅· καὶ ἀ/πὸ τῶν κ̅ε̅ ἆρον τὰ θ̅, λοιπὰ ι̅ς̅· / ὧν πλευρὰ δ̅. Ἔσται ἡ βά/σις δ̅. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπ' ἄλ/λων ἀριθμῶν εὑρήσομεν.

Ἐὰν ᾖ τρίγωνον ὀρθογώνιον / οὗ ἡ μὲν κάθετος καὶ ἡ ὑπο/τείνουσα εἰς τὸ αὐτὸ ποδῶν η̅, / ἡ δὲ βάσις ποδῶν δ̅, τούτου / κατ' ἰδίαν ζητήσομεν / τήν τε κάθετον καὶ τὴν / ὑποτείνουσαν. Εὑρήσο/μεν δὲ οὕτως. Τὰ δ̅ ἐφ' ἑαυ/τά· γίνονται ι̅ς̅· μέρισον εἰς τὸν η̅· / γίνονται β̅· τὰ β̅ ἄφελε ἀπὸ τῶν η̅· / λοιπὰ ς̅· ὧν ἥμισυ γ̅. Ἔσται / ἡ κάθετος γ̅. Ἔπειτα τὰ γ̅ / ἄφελε ἀπὸ τῶν η̅· λοιπὰ ε̅. / Ἔσται ἄρα ἡ ὑποτείνουσα / ποδῶν ε̅.

Ἐὰν ᾖ τρίγωνον ὀρθογώνιον / οὗ ἡ μὲν κάθετος καὶ ἡ βάσις / εἰς τὸ αὐτὸ ποδῶν ι̅ζ̅, ἡ δὲ ὑποτεί/νουσα ποδῶν ι̅γ̅, εὑρεῖν τήν τε / κάθετον

6 Comme le fait l'édition précédente, nous rétablissons le cas échéant (αυτα, ις, ημισου, καθ ιδιαν) la forme grecque classique et complétons les termes abrégés (γι, ποδ).

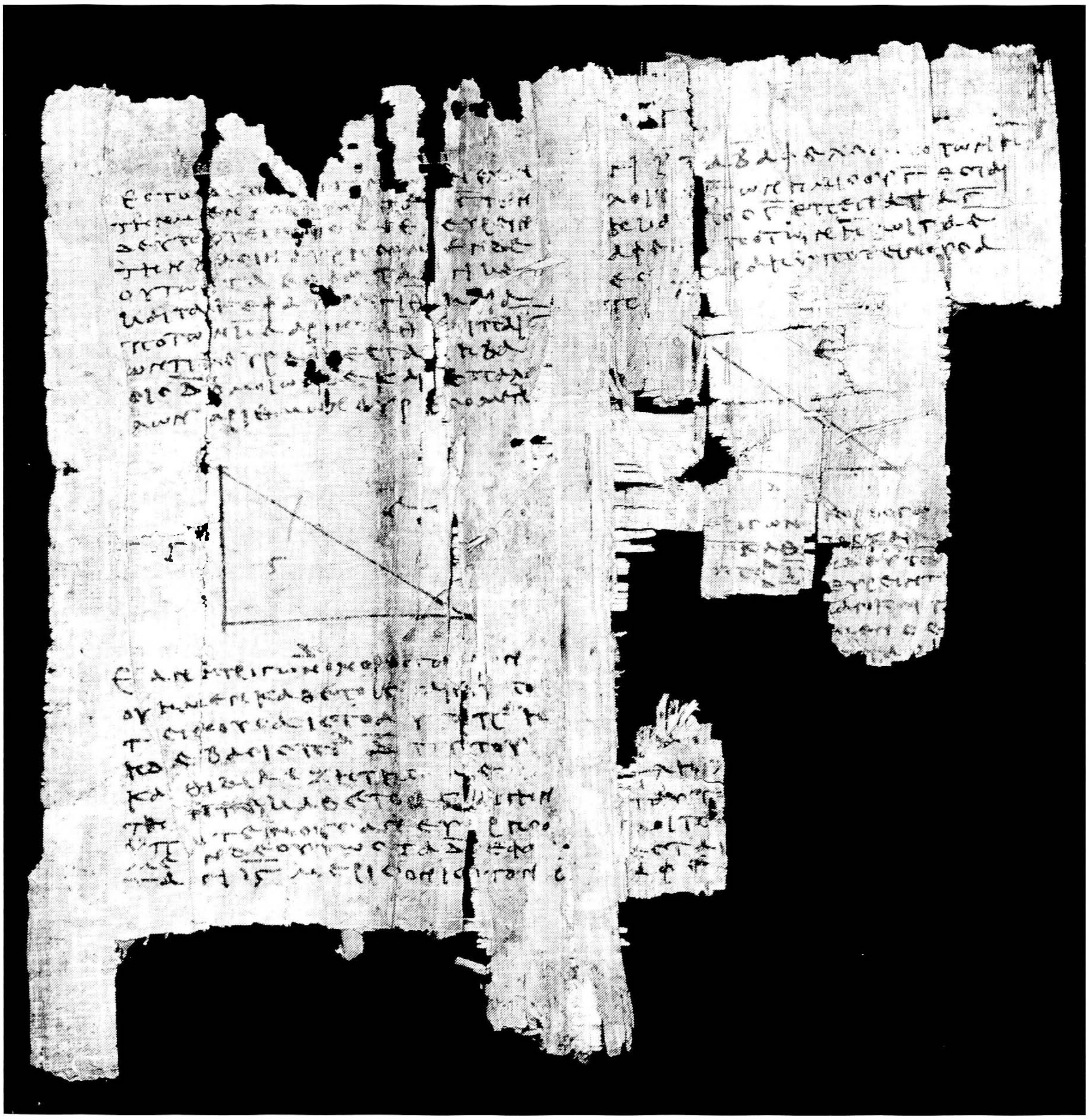


Planche 1
Genève, Bibliothèque Publique et Universitaire, Papyrus Graecus 259

Leere Seite
Blank page
Page vide

κατ' ἰδίαν καὶ τὴν / βάσιν. Εὑρήσομεν δὲ οὕ/τως. Τὰ ιγ ἐφ' ἑαυτά, ρξθ. Καὶ / τὰ ιζ ἐφ' ἑαυτά· γίνονται σπθ. Τὰ / ρξθ ποίησον δίς· γίνονται τλη. / Καὶ τὰ σπθ ἄφελε ἀπὸ τῶν / τλη· λοιπὰ μθ· ὧν πλευρὰ ζ. / Ταῦτα ἄφελε ἀπὸ τῶν ιζ· / λοιπὰ ι· τούτων τὸ ἥμισυ ε. / Ἔσται ἡ κάθετος ε. Ταῦτα / ἄφελε ἀπὸ τῶν ιζ· λοιπὰ ιβ. / Ἔσται ἄρα ἡ βάσις ποδῶν ιβ.

Dans la traduction des problèmes trouvée ci-après, nous avons rendu κάθετος et πλευρά par leurs sens respectifs plus spécifiques de «hauteur» et de «racine». Nous avons en outre maintenu l'usage, quelque peu lourd, de l'article défini devant des nombres qui, soit qu'ils fassent partie des données du problème soit qu'ils aient été entre-temps calculés, sont déjà connus du lecteur: c'est grâce à ces articles que l'on peut voir apparaître la formule utilisée.

Soit à nouveau un triangle ayant une hauteur de 3 pieds et une hypoténuse de 5; à trouver la base. Nous (la) trouverons ainsi. Les 5 par eux-mêmes font 25, et les 3 par eux-mêmes font 9; des 25, soustrais les 9; il reste 16, dont la racine est 4. La base sera 4. Nous (la) trouverons semblablement pour d'autres nombres.

Si l'on a un triangle rectangle dont la hauteur et l'hypoténuse jointes font 8 pieds, et la base est 4 pieds, et que nous désirions rechercher la hauteur et l'hypoténuse séparément. Nous (les) trouverons ainsi. Les 4 par eux-mêmes font 16; divise(-les) par les 8, cela fait 2; soustrais les 2 des 8, il reste 6, dont la moitié est 3. La hauteur sera 3. Ensuite, soustrais les 3 des 8; il reste 5. L'hypoténuse sera donc de 5 pieds.

Si l'on a un triangle rectangle dont la hauteur et la base jointes font 17 pieds, et l'hypoténuse est 13 pieds, à trouver la hauteur séparément ainsi que la base. Nous (les) trouverons ainsi. Les 13 par eux-mêmes sont 169. Et les 17 par eux-mêmes font 289. Prends le double des 169; cela fait 338. Soustrais les 289 des 338; il reste 49, dont la racine est 7. Soustrais-les des 17; il reste 10, dont la moitié est 5. La hauteur sera 5. Soustrais-les des 17; il reste 12. La base sera donc de 12 pieds.

3. Interprétation mathématique

Comme cela a été mentionné dans le premier paragraphe, la résolution de ce type de problèmes algébriques présuppose la connaissance d'identités élémentaires. Ainsi, la résolution des deux derniers problèmes repose sur les trois suivantes, qui toutes font intervenir la somme et la différence de deux quantités que nous représenterons ici par a et b.

• *Identité I:* Connaissant la somme et la différence de deux quantités, trouver la valeur de chacune d'elles.

$$a = \frac{1}{2}[(a+b) + (a-b)]$$
$$b = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)]$$

• *Identité II:* Le produit de la somme et de la différence de deux quantités égale la différence de leurs carrés.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

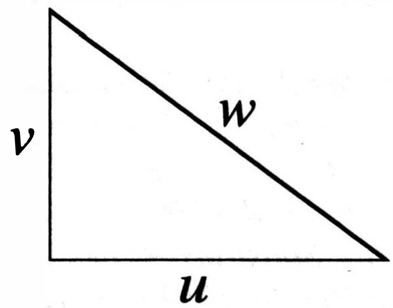
• *Identité III:* L'addition des carrés de la somme et de la différence de deux quantités égale le double des carrés de ces deux quantités.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Comme nos problèmes concernent des triangles rectangles, lesquels satisfont donc l'équation $u^2 + v^2 = w^2$ (où par convention u désignera ici la base et v la hauteur, w représentant l'hypoténuse), l'identité III prendra la forme particulière suivante:

$$(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2 + v^2) = 2w^2.$$

Seules ces trois identités interviennent dans nos problèmes. L'identité I – ou plus précisément la seconde des deux expressions qui la composent – joue le rôle d'équation de résolution, car c'est elle qui permet de déterminer à la fin la grandeur cherchée. Son emploi suppose donc la connaissance de la somme et de la différence d'une paire de quantités; la somme étant dans nos deux problèmes donnée, le calcul de la différence fait l'objet de la première partie de la résolution, et c'est là que l'auteur des problèmes a recours aux identités II et III.



Dans le ***premier problème***, la hauteur v et l'hypoténuse w sont données et l'on désire calculer la base u. C'est une banale application du théorème de Pythagore $u^2 + v^2 = w^2$ lorsque l'on connaît deux des côtés d'un triangle rectangle.

Dans le ***deuxième problème***, on connaît la base u et la somme de l'hypoténuse w et du troisième côté v, et l'on recherche ces deux dernières quantités.

Considérons généralement que $u=l$ et $w+v=k$ sont les données. Comme, en vertu de l'identité II, $u^2 = w^2-v^2 = (w+v)(w-v)$, nous aurons

$$w-v = \frac{u^2}{w+v} = \frac{l^2}{k}.$$

Nous connaissons donc $w-v$ et $w+v=k$. Ainsi, par application de l'identité I, qui devient

$$v = \frac{1}{2}[(w+v) - (w-v)] = \frac{1}{2}[k - \frac{l^2}{k}],$$

nous connaîtrons la hauteur du triangle, grâce à laquelle nous obtenons de suite l'hypoténuse, puisque

$$w = (w+v) - v = k - v.$$

C'est bien par ces deux dernières relations que sont déterminées v et w dans le texte. On voit en effet que, avec les valeurs numériques $w+v=k=8$ et $u=l=4$, l'auteur calcule successivement l^2, $\frac{l^2}{k}$, $k - \frac{l^2}{k}$, $\frac{1}{2}[k - \frac{l^2}{k}] = v = 3$, et finalement $k-v = w = 5$.

Dans le *troisième problème*, les données sont $u+v=k$ et $w=l$, et l'on recherche les valeurs individuelles de u et v. L'utilisation de l'identité de la demi-somme et de la demi-différence requiert donc préalablement la détermination de $u-v$.

Comme (selon l'identité III) $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2w^2$, on aura que $k^2 + (u-v)^2 = 2l^2$, d'où $u-v = \sqrt{2l^2-k^2}$.

Puisque $u+v=k$ est connu, on peut, par l'identité I, calculer par exemple la hauteur

$$v = \frac{1}{2}[(u+v) - (u-v)] = \frac{1}{2}[k - \sqrt{2l^2-k^2}],$$

de laquelle on déduira la longueur de la base

$$u = (u+v) - v = k - v.$$

Avec $u+v=k=17$ et $w=l=13$, le texte utilise effectivement ces deux dernières relations pour déterminer v puis u. L'auteur calcule ainsi, successivement semble-t-il, l^2, k^2, $2l^2$, $2l^2-k^2$, $\sqrt{2l^2-k^2}$, $k - \sqrt{2l^2-k^2}$, $\frac{1}{2}[k - \sqrt{2l^2-k^2}] = v = 5$, et finalement $k - v = u = 12$.

La fin de ce problème devait se trouver dans une colonne à droite du fragment conservé, et sans doute était-elle suivie d'une illustration similaire aux précédentes où auraient figuré les valeurs des trois côtés. Quant à la colonne qui apparaissait à gauche du fragment, son sujet devrait laisser place à bien des conjectures puisque seule une lettre, α, en est encore lisible. Mais d'autres moyens d'évaluation existent. Il est d'abord quasiment certain, considérant le πάλιν de la première ligne, que le problème précédent concernait aussi un triangle rectangle. Comme ensuite la première figure conservée contient l'indication de l'aire du triangle alors que ceci n'intervient aucunement dans notre premier problème, et que cette information ne paraît point être ajoutée par le scribe, il est raisonnable d'imaginer que la première figure servait également d'illustration pour le problème précédent, problème dans lequel seraient donc intervenus l'aire et des côtés (mais point le théorème de Pythagore puisqu'il fait l'objet du premier problème conservé). En revanche, rien ne permet de savoir si ladite aire était donnée ou à trouver, car les illustrations de notre papyrus font figurer les éléments du triangle tant connus que cherchés. S'il s'agissait de calculer la surface en partant de la connaissance des deux côtés perpendiculaires, le problème aurait été aussi banal que son successeur, puisque la formule $S = \frac{1}{2}uv$ n'a rien à envier en notoriété au théorème de Pythagore. Mais d'autres possibilités existent, comme celle de trouver u et v lorsque l'on connaît soit S et w, soit (ce qui raccourcit la résolution) S, w et $u+v$. Nous mentionnons ces deux problèmes parce que leur existence est attestée dans l'antiquité: ce sont ceux qui, traduits en latin, furent incorporés dans des traités d'agrimenseurs romains. Ils font donc partie de cette dizaine de problèmes du second degré résolus à l'aide d'identités dans l'antiquité grecque dont nous avons parlé au début, et que nous connaissons mieux à présent grâce à deux des trois problèmes du papyrus conservé à Genève.